

電流の連続性を満たさない場合において ICCG を収束させる方法

辻 剛士*, 岡田 勉 (村田製作所)

A method to solve discontinuous source current, using ICCG and edge element.

Takeshi Tsuji, Tsutomu Okada (Murata Manufacturing Co., Ltd.)

In recent years, edge element has been used to solve electromagnetic field by finite element method. To solve electromagnetic field using edge element, continuity of source current is the most important thing to converge ICCG. We developed a method to solve discontinuous source current, using linear algebraic approach. This approach is simple, but any source current can converge ICCG, even if the source current is inside the analysis region.

キーワード：有限要素法, 辺要素, ICCG, ノルベクトル
(finite element method, edge element, ICCG, null vector)

1. はじめに

辺要素を用いた磁界有限要素法解析では有限要素マトリクスは特異となるが、ICCG を始めとする反復解法を用いると高速に解ける事が知られている。ところがソース電流に誤差が含まれると、電流の連続性が満たされなくなり ICCG が発散する。

この問題への対策として、ソース電流を厳密に与えるための方法がいくつか提案されている⁽²⁾⁽³⁾。中でも電流ベクトルポテンシャル T を $J = \text{rot } T$ と定義し、 $\text{rot}(\rho \text{rot } T) = 0$ を満たすように境界条件を木・補木の方法を用いて設定し、 T を求める (以下電流ベクトルポテンシャル法) 方法が代表的である⁽³⁾。このように、誤差のないソース電流を設定することが辺要素を用いた磁界有限要素法では不可欠とされてきた。しかし電流ベクトルポテンシャル法はコイル形状に制限がある。コイル部に穴がある (ドーナツのような形状) 場合、境界条件処理で木・補木を設定していく過程で矛盾がおきる。穴の部分に小さな導電率を設定し穴をコイル部として扱えば解けるが、導電率の与え方には任意性があり汎用的とは言えない。また、解析領域内部にコイルが完全に埋まっている場合や、境界条件が適切に与えられていない場合は、たとえコイル部で $\text{div } J = 0$ を満たしていたとしても、ICCG が発散する。

本論文では誤差がない厳密なソース電流を与えるのではなく、ソース電流に含まれる誤差成分を代数的に取り除く方法を用いている。この方法によりコイルの形状・位置に関する制限は一際なくなり、どのようなソース電流であっ

ても ICCG を収束させる事が可能となった。

2. 回転空間と発散空間

辺要素ベクトル形状関数を基底とするベクトル空間 V は回転空間 C と発散空間 G とに完全に分離できる⁽⁶⁾。

$$V = C \oplus G \dots\dots\dots (1)$$

さらに、発散空間 C は線型写像 T により W 空間に同型に移され、発散空間 G は 0 に移される。すなわち

$$T(C) = \text{Im } T \dots\dots\dots (2)$$

$$T(G) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

となる (図 1 参照)。直和の性質により、線型写像 T により V の元 x が W に移された時に解を持つための必要十分条件は x の像 y が $\text{Im } T$ に入っている事である。

$$T(x) = y \dots\dots\dots (4)$$

$$y \in \text{Im } T \dots\dots\dots (5)$$

磁界解析で ICCG 法が収束しない原因は W の元 y が $\text{Im } T$ の外にあるか、あるいははみ出している場合である。さらに式 (5) の条件は次のように言い替える事ができる。

$$G \perp \text{Im } T = 0 \dots\dots\dots (6)$$

具体的には静磁界の有限要素マトリクスを

$$[K] \{A\} = \{J\} \dots\dots\dots (7)$$

$$[K] = \left[[C]^t \nu [C] \right] \dots\dots\dots (8)$$

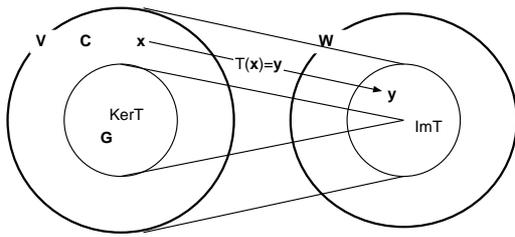


図1 回転空間 C と発散空間 G の関係

Fig. 1. Rot space C and Grad space G relationship

とした時に

$$[G]^t \{J\} = \{0\} \dots \dots \dots (9)$$

が成り立つ事である。ここで [C]、[G] は rot、grad の離散形式に対応しており、行列のサイズは、面数を f 辺数を e 節点数を n とすると、それぞれ、f × e、e × n となっている。式 (9) が成り立つ事は次のようにして分かる。まず、rot grad = 0 より、

$$[C][G] = 0 \dots \dots \dots (10)$$

が成り立っており、式 (8) に辺々 [G]^t を掛けた場合に

$$\begin{aligned} [G]^t [K] \{A\} &= [G]^t \{J\} \\ \Leftrightarrow [G]^t [C]^t [\nu] [C] \{A\} &= [G]^t \{J\} \quad \dots (11) \\ \Leftrightarrow ([C][G])^t [\nu] [C] \{A\} &= [G]^t \{J\} \\ \Leftrightarrow 0 &= [G]^t \{J\} \end{aligned}$$

となり、式 (9) がいえる。回転空間 R の階数は解析的に得る事ができ⁽⁴⁾、例えば 1 次辺要素の場合、[C] の階数は次のようになる。

$$\dim([C]) = e - n + 1 \dots \dots \dots (12)$$

式 (8) に右から [G] を掛ける事で式 (10) より [K][G] = {0} となる。すなわち、[G] の列ベクトルの 1 つを {g_i} とすると、式 (11) より、それぞれの列ベクトルは全体マトリクス [K] と直交する。すなわち {g_i} はベクトル空間 V の固有値 0 の固有ベクトルとなっている (以降 {g_i} をヌルベクトルと呼ぶ)。

$$[K] \{g_i\} = \{0\} \dots \dots \dots (13)$$

[G] の階数は、dim V = e と式 (12) を考慮して

$$\dim([G]) = n - 1 \dots \dots \dots (14)$$

となるのが分かる。準静磁界、いわゆる A - V 法の場合有限要素法離散化式は次式となる⁽⁴⁾。

$$\begin{bmatrix} [C]^t [\nu] [C] + j\omega [\sigma] & j\omega [\sigma] [G] \\ j\omega [G]^t [\sigma] & j\omega [G]^t [\sigma] [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここで行列を対称にするため、未知数となっている V は通常のポテンシャルを積分した値を用いている。静磁界の場合と同様、マトリクスに乗じた場合 0 となるようヌルベクトルを選ぶと

$$\begin{bmatrix} [G] \\ - [E] \end{bmatrix} \dots \dots \dots (16)$$

となる。この事は式 (15) に式 (16) を乗じる事で確認できる。[E] は単位行列であり静磁界同様 dim $\begin{pmatrix} [G] \\ - [E] \end{pmatrix} = n - 1$ となっている。

3. ヌル空間と直交化

静磁界の有限要素マトリクスは次のようになる。

$$\begin{aligned} [K] \{A\} &= \{J\} \\ \left[\int \text{rot } N_i \cdot \nu \text{rot } N_j dV \right] \{A_j\} &= \left\{ \int N_j \cdot J dV \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

ソース電流 {J} を与えて式 (17) を解くのだが、本手法では、{J} はどのようなものでも構わない。一番簡単な方法は電流の入力部・出力部に電位差を設定し節点要素を用いてポアソン方程式を解く方法である。

$$\left[\int \nabla N_i \cdot \rho \nabla N_j dV \right] \{\phi_j\} = \{0\} \dots \dots \dots (18)$$

$$J = -\sigma \sum \nabla N_j \phi_j \dots \dots \dots (19)$$

多線巻コイルの場合、この方法ではコイルの内側で電流密度が大きくなってしまい不適切であるが、これを補整する方法として導電率を分布させる方法等がある⁽⁵⁾。式 (18)、(19) から求まる J を式 (17) の右辺に代入しそのまま解いた場合、一般に数値誤差のためヌルベクトル成分が含まれてしまい ICCG が発散する。そこで、右辺ベクトルからヌルベクトル成分を取り除く処理が必要になる。式 (7) で、誤差を含む {J} に対し、ヌルベクトルの 1 つ {g₁} の成分を取り除いた後の {J[~]} は次のように得られる。

$$\{J\} = \{J\} - c_1 \{g_1\} \dots \dots \dots (20)$$

ここで c₁ は {g₁} の成分である。同じ様に全てのヌルベクトルの成分を取り除くと、

$$\{J\} = \{J\} - [G] \{c\} \dots \dots \dots (21)$$

ここで

$$[G] = \{\{g_1\}, \{g_2\}, \dots, \{g_n\}\} \dots \dots \dots (22)$$

$$\{c\}^t = [c_1, c_2, \dots, c_n] \dots \dots \dots (23)$$

とおいた。次に係数 {c} を決めるため、両辺に [G]^t を掛けると [G]^t {J[~]} = 0 を仮定しているので、

$$[G]^t [G] \{c\} = [G]^t \{J\}$$

$$[P] \{c\} = \{q\} \dots \dots \dots (24)$$

が得られる。ここで $[G]^t [G]$ を $[P]$ 、 $[G]^t \{J\}$ を $\{q\}$ とおいた。

マトリクス $[P]$ は対称かつ正則でありほとんどの行列成分が 0 であるため、ICCG 法で短時間で解く事ができる。式 (21) に代入することでヌル空間 G と直交する右辺ベクトル $\{J\}$ を得る事ができる。最終的には式 (25) を ICCG を使って解けばよい。

$$[K] \{A\} = \{\tilde{J}\} \dots \dots \dots (25)$$

なお、ICCG を収束させるには式 (24) は式 (25) よりも数桁高い精度で解いておく必要がある。

4. ヌルベクトルの例

2 節で説明したヌルベクトルの成分はほとんどが 0 であり、その節点に連結されている辺の成分のみ 1 (入ってくる場合) または -1 (出て行く場合) となっている。1 次辺要素を用いた静磁界解析の場合、ヌルベクトルの個数は式 (14) より $n-1$ に等しい。表 1 は 1 次三角形要素 (図 2) のヌルベクトルを表している。ここで 3 つのヌルベクトルの内 1 つは他の 2 つのヌルベクトルの線形和で表される。この例では節点 3 に関するヌルベクトル $\{g_3\}$ は $\{g_1\}$ 、 $\{g_2\}$ の線形和として表され、

$$\{g_3\} = (-1)\{g_1\} + (-1)\{g_2\} \dots \dots \dots (26)$$

となっている。この事からも一次独立なヌルベクトルは $n-1$ である事が確認できる。一次独立なヌルベクトルとして上記 $\{g_1\}$ 、 $\{g_2\}$ を選ばばよい。さらに、節点が電極上にあ

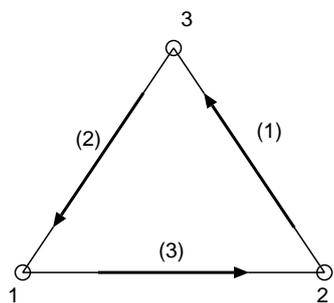


図 2 1 次 3 角形辺要素

Fig. 2. 1st order triangle edge element

る場合 (つまり拘束されている場合) には電極上のヌルベクトルは節点のヌルベクトルの和で与えられる。表 2 は電極の境界条件が与えられた場合のヌルベクトルの例を示している (図 3)。節点 1,2,3、節点 7,8,9 が同じ電極上にあ

	(1)	(2)	(3)
$\{g_1\}^t$	0	-1	1
$\{g_2\}^t$	1	0	-1
$\{g_3\}^t$	-1	1	0

表 1 1 次三角形辺要素のヌルベクトル

Table 1. Null vector of 1st order triangle edge element

り、電極のヌルベクトルはそれぞれ、

$$\{g_{1,2,3}\} = \{g_1\} + \{g_2\} + \{g_3\} \dots \dots \dots (27)$$

$$\{g_{7,8,9}\} = \{g_7\} + \{g_8\} + \{g_9\} \dots \dots \dots (28)$$

一次独立なヌルベクトルとしては、 $\{g_4\}$ 、 $\{g_5\}$ 、 $\{g_6\}$ 、 $\{g_{1,2,3}\}$ を選ばばよい。準静磁界解析の場合は式 (16) より表 3 のように表される。四面体要素のヌルベクトルは繁

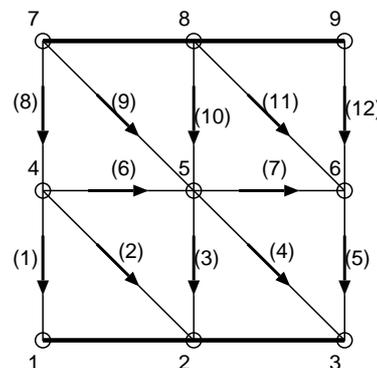


図 3 1 次三角形辺要素 (境界条件あり)

Fig. 3. 1st order triangle edge element with boundary condition

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$\{g_4\}^t$	-1	-1	0	0	0	-1
$\{g_5\}^t$	0	0	-1	-1	0	1
$\{g_6\}^t$	0	0	0	0	-1	0
$\{g_{1,2,3}\}^t$	1	1	1	1	1	0
$\{g_{7,8,9}\}^t$	0	0	0	0	0	0
	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
$\{g_4\}^t$	0	1	0	0	0	0
$\{g_5\}^t$	-1	0	1	1	0	0
$\{g_6\}^t$	1	0	0	0	1	1
$\{g_{1,2,3}\}^t$	0	0	0	0	0	0
$\{g_{7,8,9}\}^t$	0	-1	-1	-1	-1	-1

表 2 1 次三角形辺要素 (境界条件あり) のヌルベクトル

Table 2. Null vector of 1st order triangle edge element with boundary condition

雑になるため付録に示す。

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)			
$\{g_4\}^t$	-1	-1	0	0	0	-1			
$\{g_5\}^t$	0	0	-1	-1	0	1			
$\{g_6\}^t$	0	0	0	0	-1	0			
$\{g_{1,2,3}\}^t$	1	1	1	1	1	0			
$\{g_{7,8,9}\}^t$	0	0	0	0	0	0			
	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	4	5	6
$\{g_4\}^t$	0	1	0	0	0	0	-1	0	0
$\{g_5\}^t$	-1	0	1	1	0	0	0	-1	0
$\{g_6\}^t$	1	0	0	0	1	1	0	0	-1
$\{g_{1,2,3}\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_{7,8,9}\}^t$	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0

表 3 1次3角形辺要素のヌルベクトル(準静磁場解析)

Table 3. Null vector of 1st order triangle edge element(A-V method)

5. 計算例

5.1 穴の明いたコイル ベクトルポテンシャル法ではトポロジ的に単連結なコイルが前提となっており、ドーナツ状の穴の明いたコイルでは、グラフ理論を用いて木・補木を処理する過程で矛盾が起ってしまう。図4のようにドーナツ形状の表面を展開し、表面に図5のようなメッシュがあるとす。左側の図で、太線は木を、細い線は補木を、網掛の三角形は電流の流入出を表している。木にあたる辺をまず固定し、補木を処理する。その結果、処理された辺、面は右図の太線、網掛面ようになる。この例では処理できない辺が計11本残ってしまい、これ以上処理を進める事ができない。図6はヌルベクトル処理を行い穴が二つあるコイルを解析した結果である。電流が左右均等に流れ、磁界の分布(図7)も電流の回りにできており、ベクトルポテンシャル法では処理できないモデルでも妥当な結果が得られている。

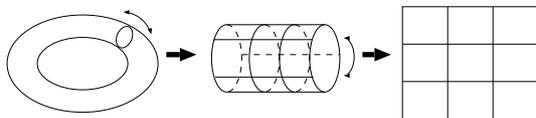


図4 ドーナツ形状コイルの展開図

Fig. 4. Torus coil mesh pattern

5.2 境界条件が適切でない場合 実質的には2次元のモデルであるが3次元で解析をおこなった。単純なモデルであり、入出面と平行な面は電極($A=0$)側面は自然境界条件としている(図8)。 $\text{rot } \mathbf{H} \neq \mathbf{J}$ でありヌルベクトル処理を行わない場合、ICCGが発散してしまう。図9は計算結果の磁束密度分布を電流の流入面から見た図である。磁束密度の方向を分かりやすくするため、全てのベク

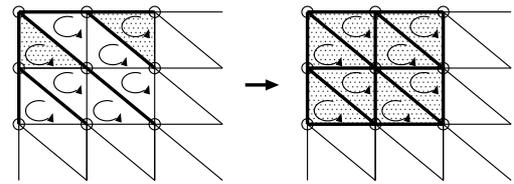


図5 木・補木の処理

Fig. 5. Tree and co-tree operation

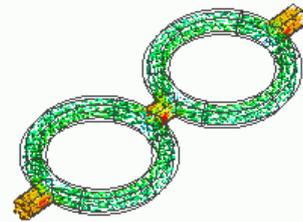


図6 穴空きコイル電流密度分布

Fig. 6. Current density field of torus coil

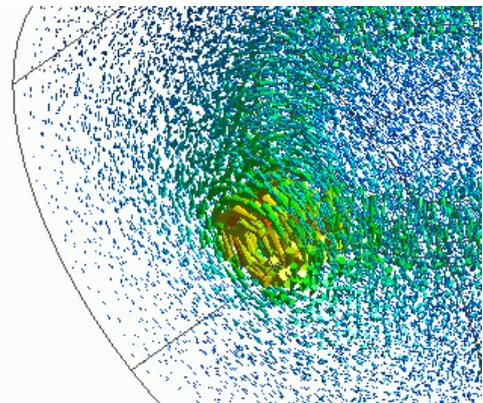


図7 穴空きコイル磁束密度分布

Fig. 7. Magnetic density field of torus coil

トルを同じ大きさでプロットしている。側面では磁界が境界に対して垂直、かつほぼ0となっており、境界部の磁界の湧き出しが0になるという意味で妥当な計算結果である。

5.3 内部に湧き出しのあるモデル 解析領域の内部に電流ソースが埋まっている場合、例えコイル部で $\text{div } \mathbf{J} = 0$ を満たしていても、解析領域内部に電流の湧きだしが存在するため、ICCGが発散する。このようなモデルであっても、ヌルベクトル処理を行えばICCGは収束し妥当な分布が得られる。図10は有限長のコイルの作る磁場を計算するためのモデルで、対称性を考慮し角度5°分のモデルで有限要素計算を行った。文献(7)に、理論値が載っており、

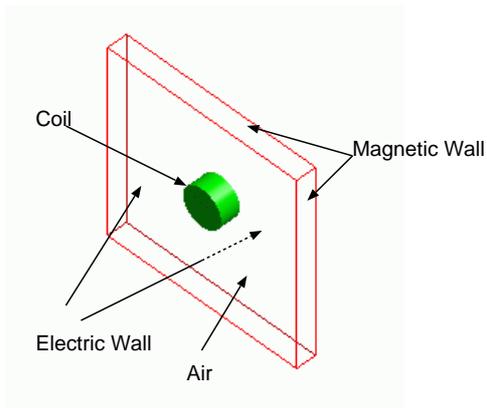


図 8 磁界の湧き出しありのモデル
Fig. 8. $\text{rot } \mathbf{H} \neq \mathbf{J}$ Model

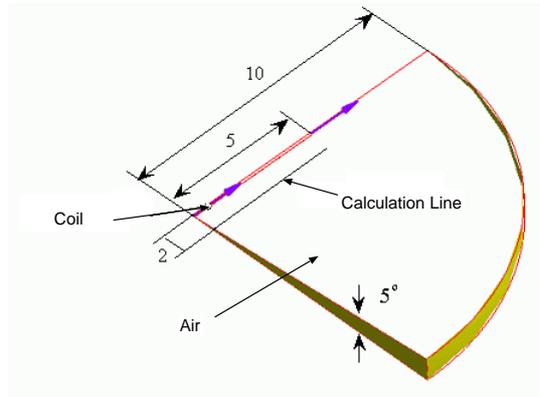


図 10 電流の湧きだしありのモデル ($\text{div } \mathbf{J} \neq 0$)
Fig. 10. $\text{div } \mathbf{J} \neq 0$ Model

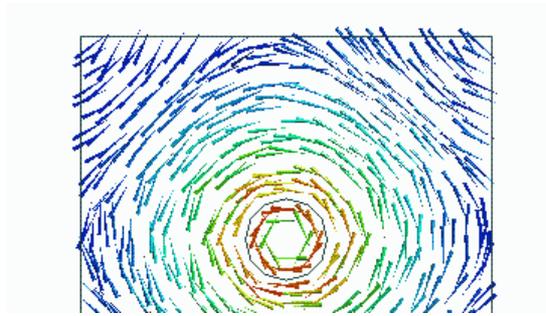


図 9 磁束密度分布 ($\text{rot } \mathbf{H} \neq \mathbf{J}$)
Fig. 9. Magnetic density field ($\text{rot } \mathbf{H} \neq \mathbf{J}$)

$$H = \frac{1}{4\pi d} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + d^2}} \right) \cdot (29)$$

となっている。ここで d コイルからの距離、 x コイルの端からの距離、 l コイルの長さとおいた。

図 11 はコイル端部の磁界の計算結果である。端部に近づくに従い磁界が徐々に減衰しているのが分かる。図 12 は解析結果と理論値を比較したグラフだが、計算値は理論値よりも 10 パーセント程度小さくなっている。理論式では端部の形状が考慮されておらず、このあたりが理論値との差の原因ではないかと推測している。

6. まとめ

以上ヌルベクトルとソース電流を直交化する事で、任意のソース電流を設定できる事を示した。ベクトルポテンシャル法ではうまく解くことができなかった計算のみならず、従来辺要素を使った有限要素法では ICCG が発散する問題にも辺要素を適用することができた。

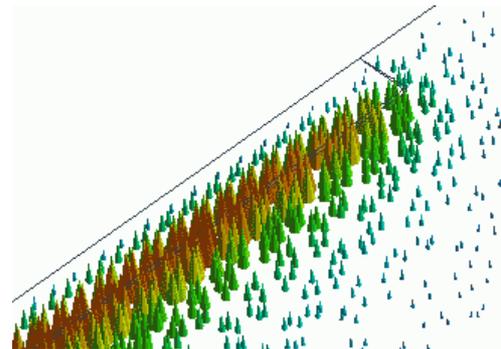


図 11 磁束密度分布 ($\text{div } \mathbf{J} \neq 0$)
Fig. 11. Magnetic density field ($\text{div } \mathbf{J} \neq 0$)

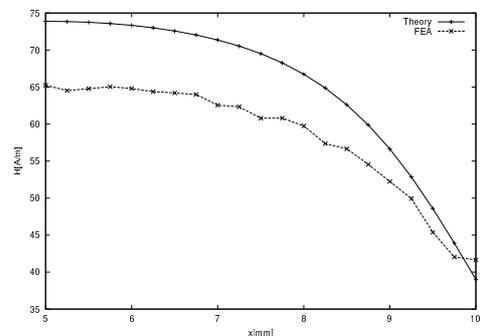


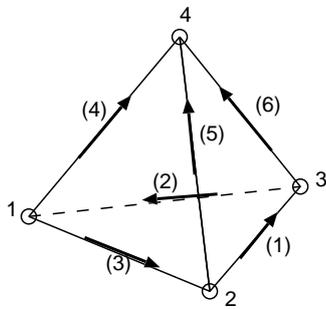
図 12 理論値との比較 ($\text{div } \mathbf{J} \neq 0$)
Fig. 12. Comparison FEA to theory ($\text{div } \mathbf{J} \neq 0$)

文 献

- (1) 藤原耕二:「辺要素を用いた三次元磁界解析」, 第 2 回電磁界数値解析に関するセミナー講演論文集, pp7-21(1991)
- (2) T.Takata, N.Takahashi, K.Fujiwara, Y.Okada: "Improvements of the T-W method for 3-D eddy current analysis", IEEE Trans. Magn., vol.20, no.1, pp.94-97,(1988)
- (3) 亀有昭久, 山根実, 平野洋一, 島田寿男:「RFP 装置における導電性厚肉シェルのカット部の不整磁場の解析」, 電気学会, 静止器・回転機合同研究会資料, SA-90-23, RM-90-35,(1990)
- (4) 五十嵐一:「辺要素有限要素法行列の基本性質」, 電気学会静止器・回転機合同研究会資料,(2000)SA-00-9, RM-00-74
- (5) 阿波根明, 亀有昭久:「辺有限要素法における均一電流が流れるコイルの定義方法について」, 電気学会静止器・回転機合同研究会資料,(2003)SA-03-51, RM-03-53
- (6) 羽野光夫:「有限要素法による 3 次元電磁界解析のための高次ベクトル要素と大次元固有値問題におけるサブスペース法」, 電気情報通信学会誌 C Vol.J84-C No.10 pp.936-943,(2001 年 10 月)
- (7) 後藤憲一, 山崎修一郎:「詳細電磁気学演習」, 共立出版, pp.226(1986)
- (8) 志賀浩二:「数学が育っていく物語 第 4 週 線型性」, 岩波書店,(1994)

付 録

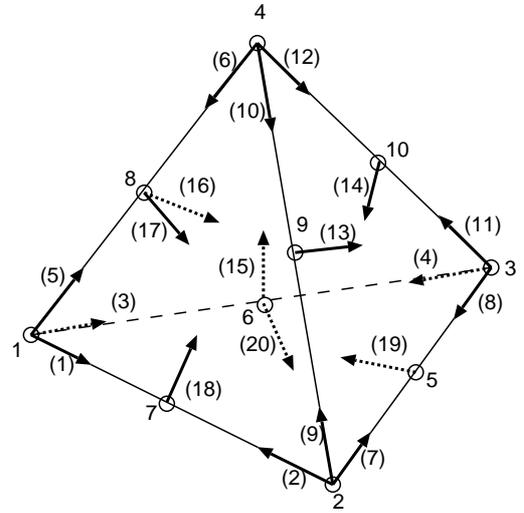
1 次四面体要素 (図 1) の場合のヌルベクトルは表 1 となる (複雑になるので 1 つの要素で示してある)。2 次四面体要素の場合 (図 2) 面成分は全てゼロであり辺成分のみで構成される (表 2)。なお、四面体要素の場合の準静磁場解析でのヌルベクトルは 1 次要素、2 次要素とも、1 次三角形要素の場合同様 $[G]$ に $-[E]$ を加え合わせた構造になる。



付図 1 1 次四面体要素
app. Fig. 1. 1st order tetra edge element

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$\{g_1\}^t$	0	1	-1	-1	0	0
$\{g_2\}^t$	-1	0	1	0	-1	0
$\{g_3\}^t$	1	-1	0	0	0	-1
$\{g_4\}^t$	0	0	0	1	1	1

付表 1 1 次四面体要素のヌルベクトル
app. Table 1. Null vector of 1st order tetra edge element



付図 2 2 次四面体要素
app. Fig. 2. 2nd order tetra edge element

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\{g_1\}^t$	-1	1	-1	1	-1	1	0	0	0	0
$\{g_2\}^t$	1	-1	0	0	0	0	-1	1	1	1
$\{g_3\}^t$	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0
$\{g_4\}^t$	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	-1
$\{g_5\}^t$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$\{g_6\}^t$	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$\{g_7\}^t$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_8\}^t$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$\{g_9\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$\{g_{10}\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)
$\{g_1\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_2\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_3\}^t$	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_4\}^t$	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_5\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_6\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_7\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_8\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_9\}^t$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{g_{10}\}^t$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

付表 2 2 次四面体のヌルベクトル
app. Table 2. Null vector of 2nd order tetra edge element